

Четырехугольники

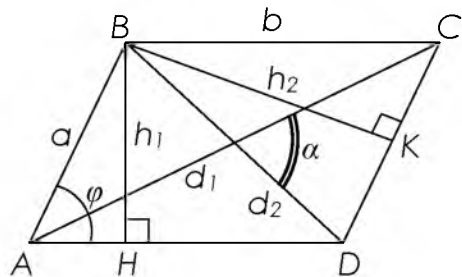


В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$

Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

Параллелограмм



$BH \perp AD$; $BK \perp DC$;
 $AB = a$; $BC = b$; $BH = h_b$; $BK = h_c$;
 $AC = d_1$; $BD = d_2$;

Площадь параллелограмма:

$$S = b h_1 = a h_2; S = ab \sin \varphi;$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha.$$

Свойства параллелограмма:

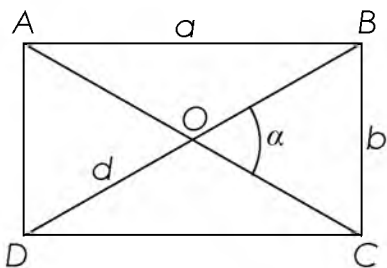
- 1) $AB = CD$, $AD = BC$;
- 2) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;
- 3) $AO = OC$, $BO = OD$;
- 4) $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$;
- 5) $\angle A + \angle B = 180^\circ$;
- 6) $\triangle ABC = \triangle CDA$; $\triangle ABD = \triangle CDB$.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Периметр параллелограмма:

$$P = 2a + 2b.$$

Прямоугольник



Свойства прямоугольника:

1) – 6) те же, что у параллелограмма;

$$7) \angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$$

$$8) AC = BD = d = \sqrt{a^2 + b^2};$$

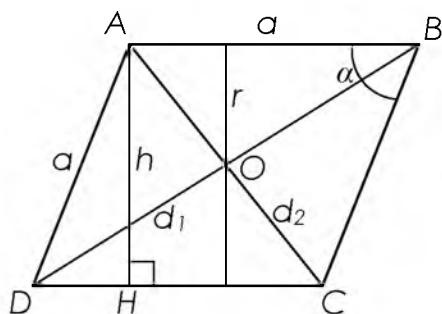
$$9) R = \frac{1}{2} d.$$

Площадь прямоугольника:

$$S = ab$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \alpha$$

Ромб



$$AB = BC = CD = AD = a$$

Свойства ромба:

1) – 6) те же, что у параллелограмма;

7) $AC \perp BD$ (или $d_1 \perp d_2$)

8) Диагонали ромба лежат на биссектрисах его углов и удовлетворяют условиям:

$$d_1 = 2a \cos \frac{\alpha}{2}; \quad d_2 = 2a \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$$

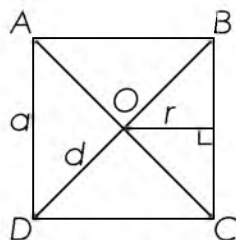
9) Высоты ромба равны и $h = 2r$;

10) В ромб можно вписать

окружность радиуса $r = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} a \sin \alpha$;

Площадь ромба: $S = ah$; $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$; $S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$.

Квадрат



Свойства квадрата:

- 1) $AB = BC = CD = AD = a$;
- 2) $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90^\circ$;
- 3) $AC = BD = d = a\sqrt{2}$;

$$4) R = \frac{1}{2}d = \frac{a}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2} \text{ - радиус окружности,}$$

описанной около квадрата;

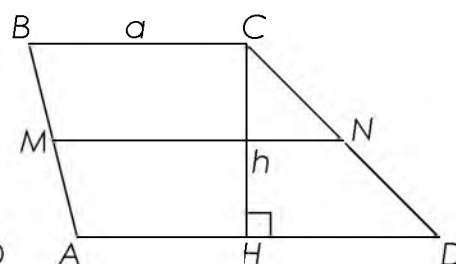
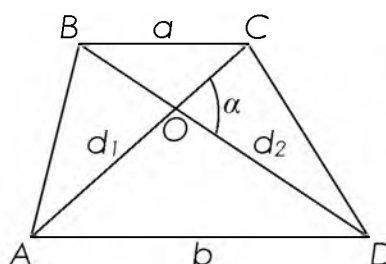
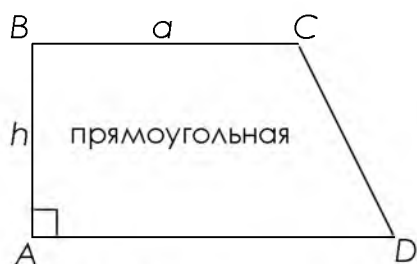
$$5) r = \frac{a}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ - радиус окружности,}$$

вписанной в квадрат;

$$\text{Площадь квадрата: } S = a^2 = \frac{1}{2}d^2; \quad S = 4r^2 = 2R^2.$$

$$\text{Периметр квадрата: } P = 4a.$$

Трапеция



Свойства трапеции:

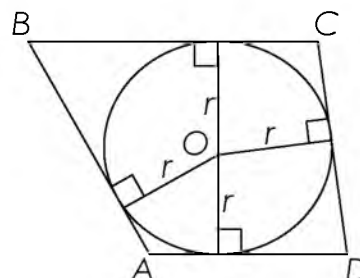
- 1) $AD \parallel BC$; $AD \neq BC$.
- 2) MN – средняя линия трапеции: $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ и $MN \parallel AD$; $MN \parallel BC$;
- 3) Неравенство диагоналей трапеции: $d_1 + d_2 > a + b$;
- 4) $\triangle COB$ подобен $\triangle AOD$;

Площадь трапеции:

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h;$$

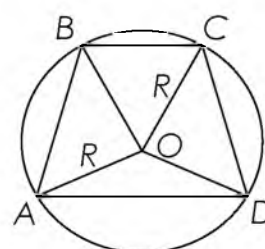
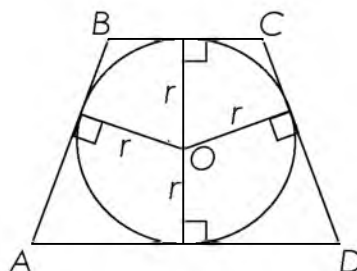
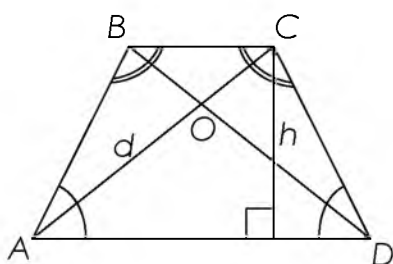
$$S = MN \cdot h;$$

$$S = \frac{1}{2}(AC + BD) \cdot \sin \alpha.$$



В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $BC + AD = AB + CD$.

Равнобедренная трапеция



Свойства равнобедренной трапеции:

- 1) $AB = CD$;
- 2) $AC = BD$ (диагонали равны);
- 3) $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$; $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (сумма односторонних углов равна 180°);
- 4) В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если $AB + CD = BC + AD$;
- 5) Около равнобедренной трапеции можно описать окружность.